Universidade Federal da Bahia
Instituto de Matemática. - Departamento de Matemática.
Disciplina: MATA03 – **Cálculo B**

UNIDADE III – LISTA DE EXERCÍCIOS

Atualizada 2013.1

Derivada Direcional e Gradiente

1) Calcule o gradiente das seguintes funções:

(1.1) $z = 2x^2 + 5y^2$ (1.2) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

(1.3) $w = 3x^2 + y^2 - 4z^2$ (1.4) $w = \cos(xy) + sen(yz)$

(1.5) $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ (1.6) $w = e^z \cos(2x)\cos(3y)$

2) Determine a derivada direcional da função dada na direção do vetor $\vec{v}$.

(2.1) $z = 2x^2 + 5y^2$, $\vec{v} = \left(\cos(\frac{\pi}{2}), sen(\frac{\pi}{2})\right)$

(2.2) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$, $\vec{v} = (1, 1)$

(2.3) $z = y^2 tg^2(x)$, $\vec{v} = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}, 1)$

(2.4) $w = \cos(xy) + sen(yz)$, $\vec{v} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

(2.5) $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $\vec{v} = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, -1, 1)$

(2.6) $w = e^{(1 + x^2 + y^2 + z^2)}$, $\vec{v} = (1, 0, 1)$

3) Determine o valor máximo da derivada direcional da função f no ponto dado e a direção e o sentido em que ocorre.

(3.1) $z = 2x^2 + 3y^2$, P(1,-1)

(3.2) $z = e^{(2y)} arctg\left(\dfrac{y}{3x}\right)$, P (1, 3)

(3.3) $w = \cos(yz) + sen(xy)$, P (-3, 0, 7)

(3.4) $w = 2xyz + y^2 + z^2$, P (1,1,1) .

4) Suponha que numa certa região do espaço o potencial elétrico V seja dado por $V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$.

(4.1) Determine a taxa de variação do potencial em P(3, 4, 5) na direção do vetor $\vec{v} = (1,1,-1)$.

(4.2) Em que direção e sentido V varia mais rapidamente em P?

(4.3) Qual a taxa máxima de variação de P?

5) Uma equação da superfície de uma montanha é z = 1200 – 3x^2 – 2y^2, a distância está em metros, os pontos do eixo x a leste e os pontos do eixo y a norte. Um alpinista está no ponto correspondente a (-10, 5, 850).

(5.1) Qual é a direção e o sentido da parte que tem inclinação mais acentuada?

(5.2) Se o alpinista se mover na direção leste ele estará subindo ou descendo, e qual será esta razão?

(5.3) Se o alpinista se mover na direção sudoeste, ele estará subindo ou descendo, e qual será esta razão?

(5.4) Em qual direção ele estará percorrendo um caminho plano?

6) Uma chapa de metal aquecida em um plano xy de tal modo que a temperatura T é inversamente proporcional à distância da origem. Se a temperatura em P(3,4) é 100^0, determine a taxa de variação de T em P na direção do vetor $u = i + j$. Em que direção e sentido o crescimento de T em P é maior? Em que direção a taxa de variação é nula?

Pontos Críticos

7) Determine e classifique os pontos críticos de:

(7.1) $z = e^{(1+x^2+y^2)}$ (7.2) $z = 3x^2 + 2xy + 2x + y^2 + y + 4$

(7.3) $z = (x^2 - 1)(y^2 - 4)$ (7.4) $z = \frac{1}{x} - \frac{64}{y} + xy$

(7.5) $z = \frac{x}{x^2 + y^2 + 4}$ (7.6) $z = 6y^2 - 8x^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4$

(7.7) $z = x^4 + xy + y^2 - 6x - 5y$ (7.8) $z = y^2x + 2yx + 2x^2 - 3x$

8) Determine os pontos extremos de:

(8.1) $z = 25 - x^2 - y^2$ tais que $x^2 + y^2 - 4y = 0$

(8.2) $z = x^2 + 2xy + y^2$ tais que $x - y = 3$

(8.3) $z = 4x^2 + 2y^2 + 5$ tais que $x^2 + y^2 - 2y = 0$

(8.4) $w = x^2 + y^2 + z^2$ tais que $3x - 2y - 4 = 0$

(8.5) $w = x + y + z$ tais que $x^2 - y^2 + z^2 = 4$

9) De todos os triângulos de perímetro fixo, determine o de maior área.

(Use que $A^2 = p(p - a)(p - b)(p - c)$, onde p é o semi-perímetro)

10) Suponha que a temperatura de um ponto (x,y,z) é dada por x + 2y + 3z. Determine as temperaturas extremas (máxima e mínima) na esfera de raio 1 centrado na origem, e ache os pontos onde estas temperaturas extremas são atingidas.

11) Mostre que o volume do maior paralelepípedo retangular pode ser inscrito num elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ é $\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$.

12) Mostre que o volume máximo de um cilindro circular com área total fixa igual a 1 é $\frac{1}{3\sqrt{6\pi}}$.

13) Determine os pontos na superfície xyz = 1 que estão mais próximos da origem.

14) Uma caixa retangular sem tampa deve ter um volume de 32 m^3. Encontre as dimensões da caixa que tem a menor área superficial.

Integração Dupla

15) Esboce a região de integração e inverta a ordem nas seguintes integrais:

(15.1) $\int_0^4 \int_0^{(y/2)} f(x,y)\,dxdy$ (15.2) $\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\,dydx$ (15.3) $\int_0^1 \int_{2x}^{3x} f(x,y)\,dydx$

16) Esboce a região de integração e inverta a ordem e calcule as seguintes integrais:

(16.1) $\int_0^1\int_{1-y}^{\sqrt{1-y}}\left(\frac{sen(\pi x)}{1-x}\right)dxdy$ (16.2) $\int_0^1\int_y^1 ye^{x^3}\,dxdy$ (16.3) $\int_0^8\int_{\sqrt[3]{y}}^2\left(\sqrt{x^4+1}\right)dxdy$

17) Calcule $\int\int_R f(x,y)dA$, onde

(17.1) $f(x,y)=xe^{xy}$; R é região $\{(x.y)\in R^2\,/\,1\le x\le 3\text{ e }0\le \text{y}\le 1\}$

(17.2) $f(x,y)=x\cos(xy)$; R é região $\{(x.y)\in R^2\,/\,0\le x\le 2\text{ e }0\le \text{y}\le \pi/2\}$

(17.3) $f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$; R é região $\{(x.y)\in R^2\,/\,0\le x\le 1\text{ e }0\le \text{y}\le 1\}$

18) Calcule as seguintes integrais, sabendo que R é região limitada pelas curvas dadas:

(18.1) $\int\int_R(8-x-y)dxdy$; $R=\{y=x^2\text{ e }\text{y}=4\}$

(18.2) $\int\int_R(x+y)dxdy$; $R=\{y=x^2+1,\ y\ =\ -x^2-1,\ x\ =\ -1\ \ e\ \ x\ =\ 1\}$

(18.3) $\int\int_R\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)dxdy$; $R=\{y=x;\ y\ =\ 2x,\ x=1\text{ e }x=2\}$

19) Transforme as seguintes integrais para coordenadas polares e calcule-as

(19.1) $\int\int_R\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dxdy$; $R=\{1\le x^2+y^2\le 4\}$

(19.2) $\int\int_R xydxdy$; $R=\{x\ge 0,\ y\ge 0, 1\le x^2+y^2\le 4\}$

(19.3) $\int\int_R\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dxdy$; $R=\{(x-a)^2+y^2\le a^2\}$

(19.4) $\int\int_R(1-x^2-y^2)dxdy$; $R=\{x\ge 0,\ y\ge 0,\ x=0,\ y=x, x^2+y^2=1\}$

20) Calcule, usando integral dupla, o volume:

(20.1) do tetraedro delimitado no 1^0 octante pelo plano $\frac{z}{3}+\frac{x}{2}+y=1$

(20.2) do sólido limitado pela superfície $f(x,y)=4-\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}$, os planos $x=3$ e $y=2$ e os três planos coordenados.

(20.3) do sólido do 1^0 octante delimitado pelos planos coordenados, pelo paraboloide $z=x^2+y^2+1$ e pelo plano $2x+y=2$

(20.4) Determinar o volume do sólido limitado pelo plano z = o e pelo paraboloide
$z = 1 - x^2 - y^2$ (use coordenadas polares).

Campos Vetoriais

21) Descreva geometricamente os seguintes campos de vetores definidos em R^2:

(21.1) $\vec{F}(x,y)=x^2\vec{j}$ (21.2) $\vec{F}(x,y)=\vec{i}+\vec{j}$ (21.3) $\vec{F}(x,y)=-y\vec{i}+x\vec{j}$

22) Calcule a divergência dos seguintes campos vetoriais:

(22.1) $\vec{F}(x,y)=(xy^2,e^{x^2+y^2})$ (22.2) $\vec{F}(x,y)=(\cos(x+y),sen(\pi xy))$

(22.3) $\vec{F}(x,y,z)=(y,x,z)$ (22.4) $\vec{F}(x,y,z)=(xy,xz,z^2)$

(22.5) $\vec{F}(x,y,z)=(e^{x^2yz},e^{xy^2z},e^{xyz^2})$

(22.6) $\vec{F}(x,y,z)=(x+\cos(y),zsen(x),x^2yz)$

23) Calcule o rotacional dos seguintes campos vetoriais:

(23.1) $\vec{F}(x,y,z)=(3z^2,3x^2,3y^2)$

(23.2) $\vec{F}(x,y,z)=(sen(x),z\cos(y),3z)$

(23.3) $\vec{F}(x,y,z)=(\cos(2xy),3x+2z+y,yz^2)$

(23.4) $\vec{F}(x,y,z)=(x,y,z)$

24) Verifique se os seguintes campos são conservativos e, em caso afirmativo, calcule o potencial:

(24.1) $\vec{F}(x,y)=(2xsen(y)+4e^x,\cos(x))$

(24.2) $\vec{F}(x,y)=(e^y,xe^y+y)$

(24.3) $\vec{F}(x,y)=(3x^2+2y^2, 4xy+6y^2)$

(24.4) $\vec{F}(x,y,z)=(yz, xz, xy)$

(24.5) $\vec{F}(x,y,z)=(yze^{xy}, xze^{xy}, e^{xy}+\cos(z))$

Integrais Curvilíneas

25) Calcule a integral de linha, onde C é a curva dada:

(251) $\int_C xydx+(x-y)dy$, C consiste dos segmentos de reta de $(0,0)$ a $(2,0)$ e de $(2,0)$ a $(3,2)$.

(25.2) $\int_C y(x^2+y^2)dx - x(x^2+y^2)dy + xydz$,

$C: x=\cos(t), y=sen(t), z=t, -\pi \le t \le \pi$

(25.3) $\int_C x^2dx+y^2dy+z^2dz$, C consiste nos segmentos de reta de (0,0,0) a (1,2,-1) e de (1,2,-1) a (3,2,0).

26) Calcule $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\gamma$ em cada um dos seguintes casos:

(26.1) $\vec{F}(x,y)=x^2\vec{i}+(x-y)\vec{j}$, $\gamma(t)=(t, sen(t)), 0\le t\le \pi$

(26.2) $\vec{F}(x,y)=x^2\vec{j}$, $\gamma(t)=(t^3, 3), -1\le t\le 1$

(26.3) $\vec{F}(x,y,z)=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k}$, $\gamma(t)=(2\cos(t), 3sen(t), t), 0\le t\le 2\pi$

(26.4) $\vec{F}(x,y,z)=(x+y+z)\vec{k}$, $\gamma(t)=(t,t,1-t^2), 0\le t\le 1$

27) Calcule a integral de linha do campo vetorial $\vec{F}=\frac{\sqrt{x}}{2}\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ no percurso definido por $x=2y=z^2$ do ponto (0,0,0) até o ponto (1,1/2,1).

28) Calcule a integral de linha do vetor $\vec{F}=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$ ao longo da trajetória fechada determinada pelo círculo de raio 2 centrado na origem e contido no plano cuja normal é o vetor $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

29) Calcule a integral de linha do campo $\vec{F} = -z\vec{i} + 3x\vec{j} + 2y\vec{k}$, no caminho fechado definido pelas arestas do triângulo cujos vértices são (1,0,0), (0,1,0) e (0,0,1) (percorridos nesta ordem).

30) Mostre que as integrais a seguir não dependem do caminho C escolhido. Calcule essas integrais.

30.1) $\int_C (2x\,\text{sen}\,y)dx + (x^2\cos y - 3y^2)dy$, onde C é qualquer caminho de (-1,0) a (3,2).

30.2) $\int_C (-e^x\cos y)dx + (e^x\,\text{sen}\,y)dy$, onde C é qualquer caminho de (0,0) a (2,1).

30.3) $\int_C (2xydx + x^2dy + zdz)$, onde C é qualquer caminho de (0,1,1) a (1,0,1).

Teorema de Green

31) Utilize o Teorema de Green para calcular as seguintes integrais de linha:

(31.1) $\oint_C \left(\dfrac{-x^2y}{1+x^2}\right)dx + arctg(x)dy$, onde C é o caminho fechado formado por $y=0, x=1, y=1, x=0$.

(31.2) $\oint_C (xdx + xydy)$, onde C é o caminho fechado formado por $y=0, x^2+y^2=1$, $(x, y \geq 0)$, $x=0$.

(31.3) $\oint_C (-y^3dx + x^3dy)$, onde C é o caminho fechado, no primeiro quadrante, formado por $y = x^3$ e $y = x$.

(31.4) $\oint_C (x^2 - y)dx + xdy$, onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = 9$.

(31.5) $\oint_C (-y^2 + arctg(x))dx + \ln(x)dy$, onde C é o caminho fechado formado por $y = x^2$ e $x = y^2$.

32) Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\vec{F}(x,y) = (x^2, xy)$ sobre uma partícula que dá uma volta no círculo $x^2 + y^2 = 4$ no sentido anti-horário.

RESPOSTAS

(1.1) 2(2x,5y) (1.2) $\left(\dfrac{-2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)(x,y)$ (1.3) 2(3x, y, -4z)

(1.4) $\left(-ysen(xy), -xsen(xy) + z\cos(yz), y\cos(yz)\right)$

(1.5) $\left(\dfrac{2x}{x^2+y^2+z^2}, \dfrac{2y}{x^2+y^2+z^2}, \dfrac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right)$

(1.6) $e^z\left(-2sen(2x)\cos(3y), -3\cos(2x)sen(3y), \cos(2x)\cos(3y)\right)$

(2.1) 10 y (2.2) $\dfrac{-\sqrt{2}(x+y)}{(x^2+y^2)^2}$

(2.3) $-ytg(x)(\sqrt{3}y\sec^2 x - tgx)$ (2.4) $\dfrac{1}{3}\left((y-2x)sen(xy) + (2z+2y)\cos(yz)\right)$

(2.5) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(\dfrac{x-y+z}{x^2+y^2+z^2}\right)$ (2.6) $\sqrt{2}(x+z)e^{(1+x^2+y^2+z^2)}$

(3.1) $2\sqrt{13}$, $v = (4,-6)$ (3.2) $\dfrac{e^6}{6}\sqrt{9\pi^2 + 6\pi + 10}$, $v = \dfrac{e^6}{6}(3, 3\pi + 1)$

(3.3) 3, v = (0, -3, 0) (3.4) 6, v = (2, 4, 4)

(4.1) $\dfrac{32}{\sqrt{3}}$ (4.2) (38, 6, 12) (4.3) $2\sqrt{406}$

(5.1) $\left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}, -\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)$ (5.2) subindo 60 m por m

(5.3) descendo a $20\sqrt{2}$ m por m (5.4) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}}, \dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)$ ou $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{10}}, -\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)$

6) $-\dfrac{28}{\sqrt{2}}$; (12, -16); $\lambda(4i - 3j)$; $\lambda \neq 0$

(7.1) (0, 0) ponto min (7.2) $\left(-\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{4}\right)$ ponto min

(7.3) (0,0) max; (1, 2), (1, -2), (-1,2), (-1, -2) selas (7.4) $\left(-\dfrac{1}{4}, 16\right)$ ponto max

(7.5) (-2, 0) ponto min; (2, 0) ponto max

(7.6) (0, 0) sela; (0, -3) e (0, 4) ponto max local

(7.7) (1, 2) ponto min

(7.8) (0, 1) e (0, -3) selas; (1, -1) min

(8.1) (0, 0), (0, 4) (8.2) $\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ (8.3) (0, 0), (0,2)

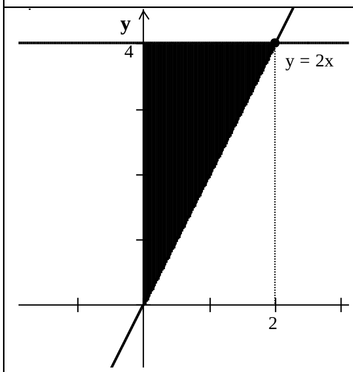
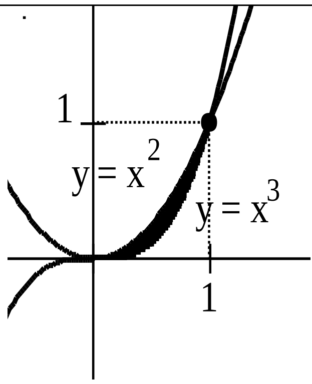
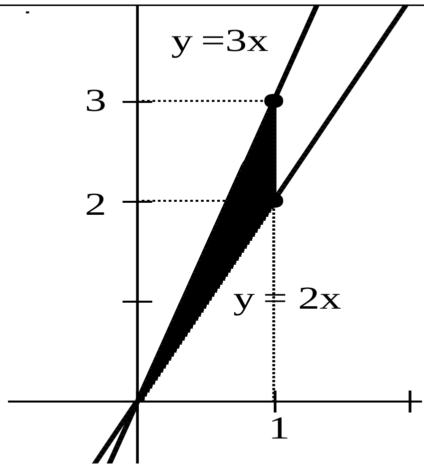
(8.4) $\left(\frac{12}{13}, -\frac{8}{13}, 0\right)$ (8.5) (2, -2, 2), (-2, 2, -2)

9) triângulo eqüilátero

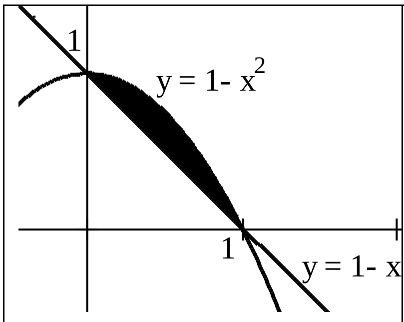
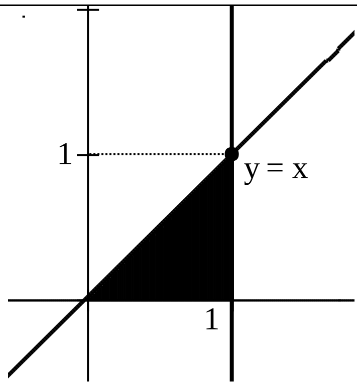
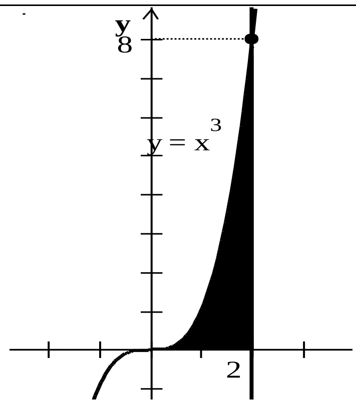
10) $T_{max} = \sqrt{14}$ em $\left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$ e $T_{min} = -\sqrt{14}$ em $\left(-\frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$

13) (1, 1, 1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1), (1, -1, -1)

14) 4 cm por 4cm por 2cm

<table>
<tr><td>(15.1)</td><td>(15.2)</td><td>(15.3)</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\int_0^2\int_{2x}^4 f(x,y)dydx$</td><td>$\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dxdy$</td><td>$\int_0^2\int_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} f(x,y)dxdy + \int_2^3\int_{\frac{y}{3}}^{1} f(x,y)dxdy$</td></tr>
</table>

(16.1)	(16.2)	(16.3)

		
$\int_0^1 \int_{1-x}^{\left(1-x^2\right)} \left(\frac{sen(\pi x)}{1-x}\right) dydx = \frac{1}{\pi}$	$\int_0^1 \int_0^x ye^{x^3} dydx = \frac{e-1}{6}$	$\int_0^2 \int_0^{x^3} \sqrt{x^4+1}dydx = \frac{17\sqrt{17}-1}{6}$

(17.1) $e^3 - e - 2$ (17.2) $4/\pi$ (17.3) $\frac{3\sqrt{3}-4\sqrt{2}+1}{3}$

(18.1) $\frac{896}{15}$ (18.2) 0 (18.3) $\left(arctg(2) - \frac{\pi}{4}\right)\ln 2$

(19.1) 2π (19.2) 15/8 (19.3) 4a (19.4) $\pi/16$

(20.1) 1 (20.2) 43/2 (20.3) 11/6 (20.4) $\pi/2$

(22.1) $y^2 + 2ye^{x^2+y^2}$ (22.2) $-sen(x+y) + \pi\, x\cos(\pi\, xy)$ (22.3) 1

(22.4) y + 2z (22.5) $2xyz\left(e^{x^2yz} + e^{xy^2z} + e^{xyz^2}\right)$ (22.6) $1 + x^2y$

(23.1) $6y\vec{i} + 6z\vec{j} + 6x\vec{k}$ (23.2) $-\cos(y)\,\vec{i}$

(23.3) $(z^2-2)\vec{i} + (3 + 2xsen(2xy))\vec{k}$ (23.4) 0

(24.1) não conservativo

(24.2) conservativo; $u(x,y) = xe^y + \frac{y^2}{2} + k$, k é constante

(24.3) conservativo; $u(x,y) = x^3 + 2y^2x + 2y^3 + k$, k é constante

(24.4) conservativo; $u(x,y,z) = xyz + k$, k é constante

(24.5) conservativo; $u(x,y,z) = ze^{xy} + senz + k$, k é constante

(25.1) 17/3 (25.2) -2π (25.3) 35/3

(26.1) $\frac{\pi^3}{3} - 2$ (26.2) 0 (26.3) $\frac{8\pi^3}{3}$ (26.4) $-\frac{11}{6}$

27) 7/3 28) -12π 29) 2

(30.1) 9sen(2) – 8 (30.2) $-e^2 \cos(1)+1$ (30.3) 0

(31.1) 1 (31.2) $\frac{1}{3}$ (31.3) $\frac{2}{5}$ 31.4) 18π

31.5) $\frac{9}{5}$ 32) 0